

# Der doppelt thermostatisierte harmonische Oszillator (qpzx Modell)

Jacobus van Meel, Harald Oberhofer, Walter Weissensteiner

25. November 2002

Diese Arbeit entstand im Rahmen der Übungen zur Vorlesung "Deterministisches Chaos 2" von Prof. Posch.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Über das qpzx Modell</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Lyapunov Exponenten und Lyapunov Dimension</b>	<b>2</b>
2.1	Linearisierten Differentialgleichungen . . . . .	2
2.2	Lyapunov Exponenten . . . . .	3
2.3	Lyapunov Dimension . . . . .	3
2.4	Erkenntnisse aus der Lyapunov Analyse . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Lokale Lyapunov Exponenten</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Poincaré Abbildung und Box Counting Dimension</b>	<b>4</b>
4.1	Die Poincaré Abbildung . . . . .	4
4.2	Die Box Counting Dimension . . . . .	5
4.3	Erkenntnisse aus der Analyse der Box Counting Dimension . . . . .	5
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>6</b>
A.1	Tabellen . . . . .	6
A.2	Diagramme . . . . .	10

# 1 Über das qpzx Modell

Im qpzx Modell wird der "einfache" harmonische Oszillator durch die Einführung 2er Thermostaten (hier  $z$  und  $x$ ) so verändert, dass der resultierende 4 dimensionale Phasenraum ergodisch ist (was sich auch später in den Kapiteln 2 und 4 zeigen wird).

$$\dot{q} = p \quad (1)$$

$$\dot{p} = -q - zp \quad (2)$$

$$\dot{z} = p^2 - T_q - zx \quad (3)$$

$$\dot{x} = z^2 - T_q \quad (4)$$

$$T_q = 1 + \varepsilon \tanh q \quad (5)$$

Die Gleichungen 1 bis 4 sind die Bewegungsgleichungen des qpzx Modells, wobei  $q$  die "räumliche" und  $p$  die Impulsordinate des Oszillators darstellt.  $z$  und  $x$  sind die beiden Nosé Hoover Thermostaten.

Das hier verwendete Modell hat zusätzlich noch einen Temperaturgradienten (Glg. 5) um einen dissipativen Fluss von positiven zu negativen  $q$  Werten zu erzeugen. Hierbei fungiert  $\varepsilon$  als Kontrollparameter.

Die Abbildungen 12 bis 17 zeigen verschiedene Projektionen der Trajektorie bei den Kontrollparametern  $\varepsilon = 0.2$  bzw.  $\varepsilon = 1.0$

## 2 Lyapunov Exponenten und Lyapunov Dimension

Charakteristisch für chaotische Systeme ist ihre Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Änderungen der Anfangsbedingungen. Um ein quantitatives Maß für diese Empfindlichkeit angeben zu können, betrachtet man eine "gestörte" Trajektorie - eine Trajektorie mit leicht geänderten Anfangsbedingungen- und untersucht das zeitliche Verhalten dieser Störung.

### 2.1 Linearisierten Differentialgleichungen

Um diese direkt berachten zu können, verwendet man die "linearisierten Gleichungen" (6-9) der Differentialgleichungen 1 bis 4.

$$dq = dp \quad (6)$$

$$dp = -dq - z \cdot dq - dz \cdot q \quad (7)$$

$$dz = 2 \cdot p \cdot dp - dT_q \cdot dq - z \cdot dx - dz \cdot x \quad (8)$$

$$dx = 2 \cdot z \cdot dz - dT_q \cdot dq \quad (9)$$

## 2.2 Lyapunov Exponenten

Liegt tatsächlich chaotisches Verhalten vor wächst der Betrag der Störung  $|\vec{\delta}| = |(dq|dp|dz|dx)^T|$  exponentiell. Um ein Maß für dieses Wachstum zu erhalten bildet man den Quotienten des natürlichen Logarithmus der Störung zur Zeit  $t_{n+1}$  und des natürlichen Logarithmus zur Zeit  $t_n$  und mittelt diesen Wert über lange Zeiten. Dieser Wert heißt (größter) "Lyapunov Exponent"  $\lambda_1$  (Glg. 10). Ist  $\lambda_1$  positiv, so ist das System chaotisch, anderenfalls ist das System stabil. Da bei exponentiellem Wachstum des Störungsvektors schnell der Rahmen einer double Variable gesprengt würde, wird der Vektor der Störung  $\vec{\delta}$  nach jedem Zeitschritt normiert.

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^n \frac{\ln |\vec{\delta}(t_{i+1})|}{\ln |\vec{\delta}(t_i)|} \quad (10)$$

In einem  $n$ -dimensionalen Phasenraum  $\Gamma$  lassen sich  $n$  linear unabhängige Störungsvektoren  $\vec{\delta}_n$  bilden, denen jeweils ein Lyapunov Exponent zugeordnet ist. Diese  $\vec{\delta}_n$  sind orthogonal. Sortiert man die zugehörigen Lyapunov Exponenten  $\lambda_n$  nach ihrer Größe, so ergeben sie das "Lyapunov Spektrum" (Glg. 11). Pro Lyapunov Exponent muß ein linearisiertes Gleichungssystem (Glg. 6 bis 9) mit verschiedenen Anfangsbedingungen gerechnet werden.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad ; n = \dim\{\Gamma\} \quad (11)$$

Da die Störung  $\vec{\delta}_1$  (per Definition) den größten Lyapunov Exponenten besitzt, wächst sie am Schnellsten. Um zu verhindern, daß sich die anderen Störungsvektoren nach einigen Zeitschritten nach  $\vec{\delta}_1$  ausrichten, muß man nach jedem Zeitschritt eine Reorthonormierung der Störungsvektoren durchführen.

## 2.3 Lyapunov Dimension

Chaotische Systeme können fraktale Eigenschaften aufweisen. Zeigen läßt sich dies durch die Berechnung der sogenannten "fraktalen Dimension". Diese sollte kleiner oder - im vollständig chaotischen (= ergodischen) Fall - gleich der geometrischen Dimension des Phasenraumes sein. Mit Hilfe der Lyapunov Exponenten ist es möglich eine Dimension - die "Lyapunov Dimension" - zu berechnen.

$$D_L = k + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{|\lambda_k|} \quad ; k \in N : \sum_{i=1}^k \lambda_i > 0 \quad (12)$$

## 2.4 Erkenntnisse aus der Lyapunov Analyse

Unser Ziel war festzustellen, bei welchem Wert des Kontrollparameters  $\epsilon$  das System vom chaotischen in den stabilen Zustand übergeht und den Bereich um diesen Wert näher zu untersuchen, um herauszufinden, ob sich die Lyapunov Exponenten entsprechend einem power law verhalten, wie man es bei einem Phasenubergang erwarten würde.

Dazu berechneten wir zuerst eine Übersicht (Tabelle 2, Abb. 2) im Bereich  $\epsilon \in [0; 0,3]$  und betrachteten danach den Bereich um  $\epsilon = 0,26$  (Tabelle 3, Abb. 3) detaillierter. Anschließend "fitteten" wir die Detailkurven von  $\lambda_1 - \lambda_4$  und  $D_L$ . Ein fuer alle Kurven gültiges power law konnten wir dabei jedoch nicht finden.

### 3 Lokale Lyapunov Exponenten

Die Lokalen Lyapunovexponenten stellen eine Art Maß für das Chaos an beliebigen Punkten im Phasenraum dar - ihr Mittel entspricht den "gewöhnlichen" Lyapunovexponenten. Zur Berechnung benötigt man eine ausreichend lange Trajektorie, entlang welcher man bis exakt zu dem gesuchten Punkt das Lyapunovspektrum ermittelt.

Durch Errechnung der Lokalen Lyapunovexponenten zu Punkten entlang einer Geraden ( $q, p = 0, z = 0, x = 0$ ) bei  $\epsilon = 0$  bei unterschiedlicher Schrittweite entlang der Q-Achse wollten wir die fraktale Variation der Exponenten zeigen.

Leider ließen sich trotz Ausprobieren verschiedenster Zeitschritte, Integrationsdauern und Einschwingzeiten keine eindeutigen Fälle von Selbstähnlichkeit oder deutlicher Strukturbildung bei unterschiedlicher Ortsskalierung feststellen. Siehe Abbildungen 4-7 ( $dQ = 0.2$ ) und 8-11 ( $dQ = 0.01$ ).

### 4 Poincaré Abbildung und Box Counting Dimension

#### 4.1 Die Poincaré Abbildung

Die Poincaré Abbildung stellt eine Möglichkeit dar einen kontinuierlichen Fluss diskret abzubilden und zu visualisieren. Hierzu wird im Phasenraum eine Hyperfläche deren Dimension um eins geringer ist als die des Raumes so gelegt, dass sie von fast allen Orbits des Systems geschnitten wird (Poincaré Sektion). Die Abbildung die nun die Durchstoßpunkte (von der selben Seite der Hyperfläche) des Systems miteinander in Zusammenhang bringt nennt man Poincaré Abbildung.

Hat man die Hyperfläche sorgfältig gewählt geht nichts von den qualitativen Eigenschaften (z.b. die Position der evtl. vorhandenen periodischen Orbits) Systems verloren.

In unserem Fall ist der Phasenraum 4 dimensional und die Hyperfläche wird durch die Relation  $q = 0$  definiert, was bedeutet dass unsere Poincaré Abbildung in einem 3 dimensionalen Raum residiert. Um diese gut darzustellen haben wir einige Projektionen auf 2 d Ebenen ( Abb. 18 - 19 ) gemacht und ein Tool erzeugt, dass die Punkte 3 dimensional darstellen kann.

## 4.2 Die Box Counting Dimension

Eine andere Art der Dimensionsanalyse bei Fraktalen neben der Lyapunov Dimension stellt die Box Counting Dimension ( $D_{BC}$ ) dar. Dabei wird der Phasenraum in gleich große Boxen eingeteilt, und die Anzahl der durch das Fraktal (hier die Poincaré Abbildung) besetzten Boxen ( $N(R)$ ) - in Abhängigkeit der Boxgröße ( $R^3$ ) - gezählt. Es gilt:

$$D_{BC} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\ln N(R)}{\ln \frac{1}{R}} \quad (13)$$

Wobei der Limes  $R \rightarrow 0$  nur für kontinuierliche Fraktale sinnvoll ist. Bei diskreten Systemen wie der Poincaré Abbildung gibt es, bedingt durch die endliche Zahl der vorhandenen Punkte, eine Grenze ab der eine Verkleinerung der Boxgröße keine Erhöhung der Besetzungszahl mehr bringt.

## 4.3 Erkenntnisse aus der Analyse der Box Counting Dimension

Der Theorie nach sollte  $D_L \leq D_{BC}$  sein - das Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall, dass das System ergodisch ist. Da  $D_L$  im vollständig chaotischen Fall = 3 ist sollte auch die Box Counting Dimension = der Geometrischen Dimension des Phasenraumes = 3 sein.

Bei unseren ersten Versuchen  $D_{BC}$  zu bestimmen wählten wir den Box - Zählbereich so, dass das die gesamte Punktmenge der Poincaré Abbildung darin enthalten ist, also im Bereich von  $-5.1$  bis  $+5.1$  in allen 3 Raumrichtungen. Dabei ergab sich jedoch eine Dimension von  $D_{BC} \simeq 2.5$ . Erst als wir den Bereich einschränkten stieg auch der Wert der Dimension.

Den Erwarteten Wert von 3.0 erhielten wir erst, als wir den Bereich so weit geschrumpft hatten, dass er vollständig in der Punktmenge der Poincaré Abbildung enthalten war ( $-2.5$  bis  $+2.5$  siehe auch Tabelle 1). Wir variierten auch die Zahl der Punkte um zu sehen ob dieser Effekt davon abhängig ist. Es zeigte sich aber, dass dadurch nur die Länge des "Linearen Bereichs" im Diagramm ( $\ln N(R)$  zu  $\ln \frac{1}{R}$ ) veränderte.

<u>Bereichsgröße</u>	<u>Dimension</u>
1.8	3.0019
2.5	3.0028
3.5	2.7956
5.1	2.3915
7.0	2.3657

Tabelle 1: Lyapunov Dimension in Abhängigkeit von der Bereichsgröße

Wir wissen also nicht worauf der von uns beobachtete Effekt zurückzuführen ist.

# A Anhang

## A.1 Tabellen

$\epsilon$	Dimension	Lyapunov Exponenten			
0	4,00048	0,0655187	0,000945521	-0,0020521	-0,064381
0,005	3,99944	0,0665957	0,000895107	-0,00148624	-0,0660413
0,01	3,99983	0,0629332	0,00208332	-0,000368316	-0,064659
0,015	3,99808	0,0680942	0,00117935	-0,00136284	-0,0680416
0,02	3,99776	0,0668327	0,00262222	2,80E-05	-0,069639
0,025	3,99797	0,0669089	0,000886166	-0,00177737	-0,0661518
0,03	3,99847	0,0665869	0,00144619	-0,00268317	-0,0654502
0,035	3,99426	0,0674249	0,000735373	-0,00291917	-0,0656176
0,04	3,99337	0,0663387	0,00145855	-0,000868804	-0,0673749
0,045	3,991	0,0652994	0,000794437	-0,00182241	-0,064855
0,05	3,99138	0,0657354	0,000413541	-0,00226934	-0,0644352
0,055	3,99222	0,0620999	0,00185661	-0,000183541	-0,0642728
0,06	3,97998	0,064901	0,000968918	-0,00227144	-0,0648977
0,065	3,98408	0,0671681	0,00106626	-0,00239547	-0,0669038
0,07	3,98345	0,0643369	0,000551416	-0,00133794	-0,0646198
0,075	3,97876	0,0641978	0,00110145	-0,000455836	-0,0662507
0,08	3,97234	0,0656915	0,00158394	-0,0018474	-0,067289
0,085	3,97206	0,0645771	0,00102109	-0,00192118	-0,0655075
0,09	3,96665	0,0667671	0,000180951	-0,00351292	-0,0656236
0,095	3,96448	0,0667578	0,0014843	-0,0029968	-0,067648
0,1	3,95114	0,063387	0,000861699	-0,00158962	-0,0658776
0,105	3,9623	0,0633126	0,00119704	-0,000977088	-0,0660218
0,11	3,95374	0,0654124	0,000682419	-0,00176077	-0,0674546
0,115	3,93848	0,0662081	0,000383745	-0,0031774	-0,0675717
0,12	3,94322	0,062319	0,00136255	-0,00162732	-0,0657895
0,125	3,93469	0,0663905	0,000378177	-0,00393694	-0,0672217
0,13	3,94114	0,0668103	0,00118523	-0,00265837	-0,0694232
0,135	3,92235	0,0674317	0,000280739	-0,00401781	-0,0690571
0,14	3,9177	0,0651104	0,000688863	-0,00370372	-0,0676641
0,145	3,92072	0,0665336	0,000713593	-0,00355261	-0,069179
0,15	3,91001	0,0638287	0,00056217	-0,00321432	-0,0672264
0,155	3,87971	0,0645863	0,000427017	-0,00415431	-0,0691812
0,16	3,87984	0,0643407	0,000262376	-0,00420906	-0,0686421

**Fortsetzung auf der nächsten Seite**

$\epsilon$	Dimension	Lyapunov Exponenten			
0,165	3,8709	0,0652041	0,000355811	-0,00359775	-0,0711469
0,17	3,84756	0,0636969	0,000433535	-0,00422788	-0,0706768
0,175	3,83161	0,0632134	0,00022331	-0,00529421	-0,0699159
0,18	3,80167	0,0656085	0,000117131	-0,00706188	-0,0731768
0,181	3,80033	0,063747	0,000276817	-0,00616696	-0,0722909
0,182	3,7649	0,0662982	0,000127982	-0,00791056	-0,0765006
0,183	3,76793	0,0630585	1,18E-05	-0,00773869	-0,0720528
0,184	3,75745	0,064061	0,000382808	-0,00788223	-0,0746739
0,185	3,77297	0,0657784	6,60E-05	-0,0091084	-0,0734004
0,186	3,75237	0,0684841	-1,35E-05	-0,0106446	-0,0768588
0,187	3,7452	0,067559	-2,73E-05	-0,0100949	-0,0770752
0,188	3,71928	0,066087	1,35E-05	-0,0108937	-0,0767532
0,189	3,68556	0,0645559	-3,12E-05	-0,0132777	-0,0747521
0,19	3,68736	0,0664947	0,000170748	-0,0129363	-0,0781678
0,191	3,70183	0,0685272	-1,93E-06	-0,0128449	-0,0793361
0,192	3,69366	0,0709055	-2,17E-05	-0,0146898	-0,0810113
0,193	3,67765	0,0671527	6,30E-05	-0,013089	-0,0798739
0,194	3,66772	0,0687089	5,95E-05	-0,0146901	-0,0809895
0,195	3,64419	0,0689963	9,62E-06	-0,015507	-0,0830478
0,196	3,63968	0,0659278	-5,14E-05	-0,0131062	-0,0824946
0,197	3,64552	0,0689383	5,20E-06	-0,0154612	-0,0828512
0,198	3,65419	0,0700919	-1,16E-05	-0,0150911	-0,0840571
0,199	3,61941	0,0676637	-3,99E-06	-0,0150739	-0,0848961
0,2	3,628	0,0687389	2,67E-05	-0,01466	-0,0861561
0,201	3,61575	0,0702436	-3,36E-06	-0,0155457	-0,0888252
0,202	3,62013	0,0689872	1,82E-05	-0,0150377	-0,0870268
0,203	3,58276	0,0668009	2,37E-05	-0,0164276	-0,0864803
0,204	3,59691	0,0701275	3,17E-05	-0,019344	-0,085131
0,205	3,58654	0,0686792	2,82E-05	-0,0172694	-0,0876967
0,206	3,58053	0,0691282	-2,06E-05	-0,0187969	-0,0866632
0,207	3,57672	0,0691036	1,06E-05	-0,0173545	-0,0897477
0,208	3,57801	0,0705116	-6,46E-05	-0,0194189	-0,0882824
0,209	3,55109	0,0677994	-1,01E-05	-0,0200893	-0,0865552
0,21	3,53296	0,065889	8,97E-05	-0,0200171	-0,0862376
0,211	3,52022	0,067059	7,92E-06	-0,0222569	-0,086137
0,212	3,53619	0,0680672	1,82E-05	-0,0211963	-0,0874492
0,213	3,53447	0,0678639	1,50E-05	-0,0206577	-0,0883509
0,214	3,52265	0,0664513	-5,76E-05	-0,0198564	-0,0890412
0,215	3,49034	0,0638489	2,40E-05	-0,0210649	-0,087303
0,216	3,47496	0,0637148	4,10E-05	-0,0226476	-0,0865507
0,217	3,46919	0,0630563	-3,26E-06	-0,0218756	-0,087763
0,218	3,48225	0,0646555	-4,48E-06	-0,0228035	-0,0867757
<b>Fortsetzung auf der nächsten Seite</b>					

$\epsilon$	Dimension	Lyapunov Exponenten			
0,219	3,46984	0,0623631	-1,47E-05	-0,0222757	-0,0852893
0,22	3,46009	0,0626343	1,38E-05	-0,0224055	-0,0874657
0,221	3,46436	0,0652753	6,76E-05	-0,0249196	-0,0870513
0,222	3,43677	0,0632241	-9,53E-06	-0,025267	-0,0868817
0,223	3,42607	0,0626739	-3,33E-05	-0,0263879	-0,0850857
0,224	3,44574	0,0625673	4,41E-05	-0,0243899	-0,0857476
0,225	3,40896	0,058808	1,39E-05	-0,0241068	-0,0848856
0,226	3,42428	0,0627078	-4,64E-06	-0,0265815	-0,0851368
0,227	3,42382	0,0633215	-4,00E-06	-0,0262635	-0,087429
0,228	3,39648	0,063455	-3,45E-05	-0,0289407	-0,0869639
0,229	3,40865	0,0590658	-6,94E-06	-0,0253523	-0,0824819
0,23	3,38758	0,0598352	2,64E-05	-0,0271231	-0,0844682
0,232	3,36753	0,0589315	-4,10E-05	-0,0280069	-0,0840299
0,234	3,38862	0,0614563	-2,60E-05	-0,0277522	-0,0866618
0,236	3,35209	0,0582953	1,78E-05	-0,0276108	-0,0872003
0,238	3,31747	0,0557549	8,02E-05	-0,028369	-0,0865156
0,24	3,2881	0,0546234	-2,00E-05	-0,029964	-0,0855241
0,242	3,24055	0,0518955	4,81E-05	-0,0319049	-0,0833048
0,244	3,23102	0,0525837	1,41E-06	-0,0329527	-0,0849818
0,246	3,26571	0,0540307	2,94E-05	-0,030843	-0,0873781
0,248	3,23472	0,0538994	-3,49E-06	-0,0335323	-0,0867588
0,25	3,22872	0,0547466	2,12E-05	-0,0346323	-0,0880339
0,252	3,17791	0,0525957	-2,81E-06	-0,0373273	-0,0858065
0,254	3,16624	0,0508386	1,89E-05	-0,0365661	-0,08597
0,256	3,14922	0,0498935	-3,21E-05	-0,0370255	-0,0860218
0,258	3,10533	0,045896	6,83E-06	-0,0370543	-0,084009
0,26	3,03903	0,0394014	7,50E-06	-0,0362594	-0,0806985
0,262	2,99054	0,0318826	7,38E-05	-0,0326978	-0,0784027
0,264	2,88608	4,58E-07	-0,00443496	-0,0043877	-0,0774407
0,266	2,84401	1,04E-05	-0,00597552	-0,00599295	-0,0766611
0,268	2,79915	4,80E-06	-0,00762251	-0,00760236	-0,0757796
0,27	2,75018	-2,42E-05	-0,00933615	-0,00933618	-0,074839
0,272	2,70046	2,02E-06	-0,0110498	-0,0110453	-0,0737565
0,274	2,64523	-2,57E-06	-0,0128989	-0,0128552	-0,0726021
0,276	2,58537	-3,27E-05	-0,0147707	-0,0147996	-0,071397
0,278	2,52419	4,38E-05	-0,0166673	-0,0166885	-0,0700108
0,28	2,45509	4,73E-06	-0,0186931	-0,0186972	-0,0686085

Tabelle 2: Lyapunov Exponenten und Dimension in Abhängigkeit von  $\epsilon$

$\epsilon$	Lyapunov Exponenten			
0,2	0,069	0	-0,016	-0,085
0,205	0,068236	2,56E-06	-0,017666	-0,086739
0,21	0,067566	2,62E-06	-0,019794	-0,08735
0,215	0,065492	1,08E-06	-0,021363	-0,086977
0,22	0,063739	9,88E-07	-0,023556	-0,086672
0,225	0,06233	1,38E-06	-0,025716	-0,085123
0,23	0,061352	2,23E-06	-0,026497	-0,086067
0,235	0,058516	4,93E-06	-0,027531	-0,085438
0,24	0,05607	3,32E-07	-0,029503	-0,086622
0,245	0,052991	3,23E-06	-0,031532	-0,086467
0,25	0,053	0	-0,034	-0,086
0,255	0,050483	4,20E-06	-0,037427	-0,085232
0,26	0,044434	9,13E-06	-0,036427	-0,08445
0,261	0,042098	4,61E-06	-0,036698	-0,082594
0,2615	4,01E-02	3,34E-06	-0,036339	-0,081703
0,262	0,037545	3,96E-06	-0,036582	-0,079618
0,2625	0,034959	4,97E-06	-0,035772	-0,078792
0,263	0,034603	5,10E-06	-0,035763	-0,078485
0,2635	3,36E-02	4,52E-06	-0,033799	-0,078684
0,264	0,031067	4,43E-06	-0,032597	-0,079085
0,2645	0,027651	2,56E-06	-0,028992	-0,079605
0,265	0,024492	3,41E-06	-0,026633	-0,079968
0,2655	2,14E-06	-0,0041734	-0,0041826	-0,078539
0,266	2,84E-06	-0,0045668	-0,0045743	-0,078342
0,2665	2,54E-06	-0,0049636	-0,0049707	-0,07814
0,267	1,62E-06	-0,0053662	-0,0053691	-0,077932
0,2675	2,04E-06	-0,0057687	-0,0057749	-0,077719
0,268	3,63E-06	-0,006177	-0,0061798	-0,077499
0,2685	2,50E-06	-0,006588	-0,006593	-0,077274
0,269	2,63E-06	-0,0070031	-0,0070081	-0,077043
0,2695	2,76E-06	-0,0074238	-0,0074272	-0,076807
0,27	2,59E-06	-0,007846	-0,00785	-0,076564
0,275	1,86E-06	-0,012299	-0,012303	-0,073801
0,28	2,06E-06	-0,017152	-0,017157	-0,07042
0,285	2,34E-06	-0,022372	-0,022378	-0,066484
0,29	1,99E-06	-0,027848	-0,027853	-0,062202
0,295	2,26E-06	-0,033371	-0,033375	-0,057943
0,3	0	-0,04	-0,04	-0,053

Tabelle 3: Lyapunov Exponenten in Abhängigkeit von  $\epsilon$  Detailansicht

## A.2 Diagramme

Abbildung 1: Lyapunov Dimension in Abhängigkeit von  $\epsilon$ ;  $dT = 0.001$ ; 1G Iterationen

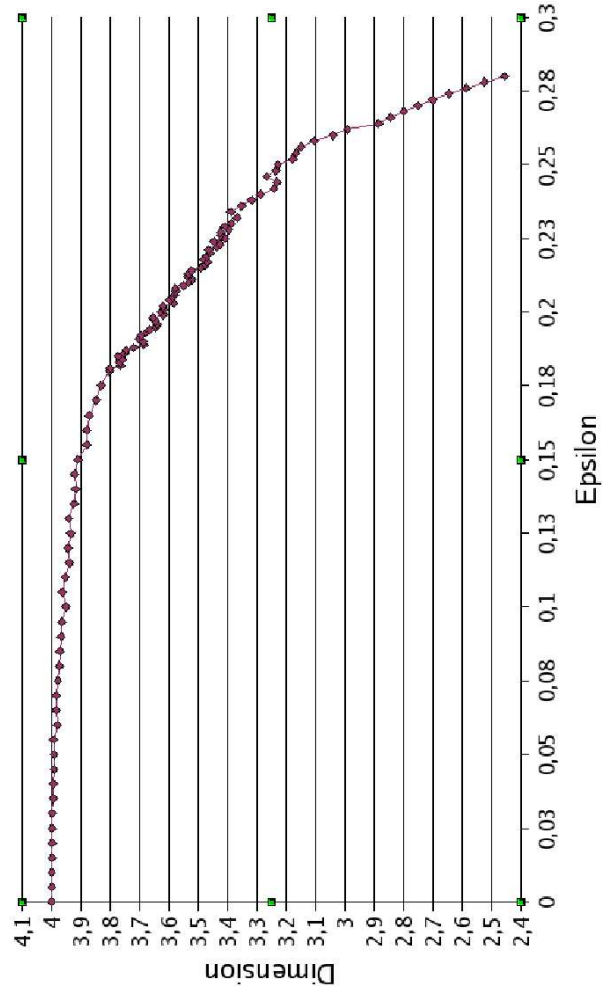


Abbildung 2: Globale Lyapunov Exponenten in Abhängigkeit von  $\epsilon$  (Übersicht);  
 $dT = 0.001$ ; 1G Iterationen

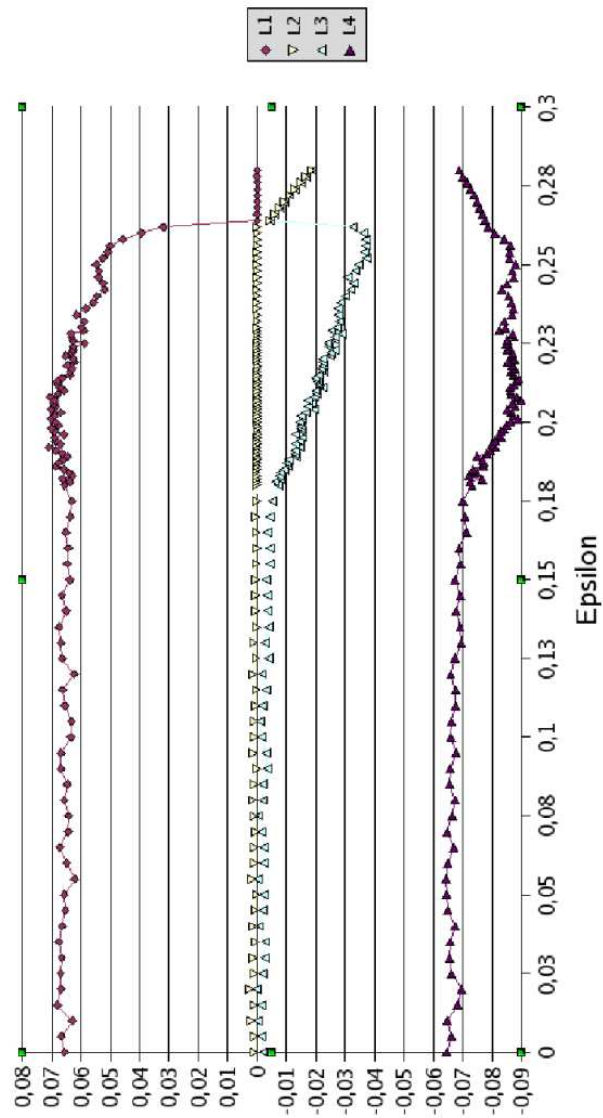


Abbildung 3: Globale Lyapunov Exponenten in Abhängigkeit von  $\epsilon$  (Detail);  
 $dT = 0.001$ ; 1G Iterationen

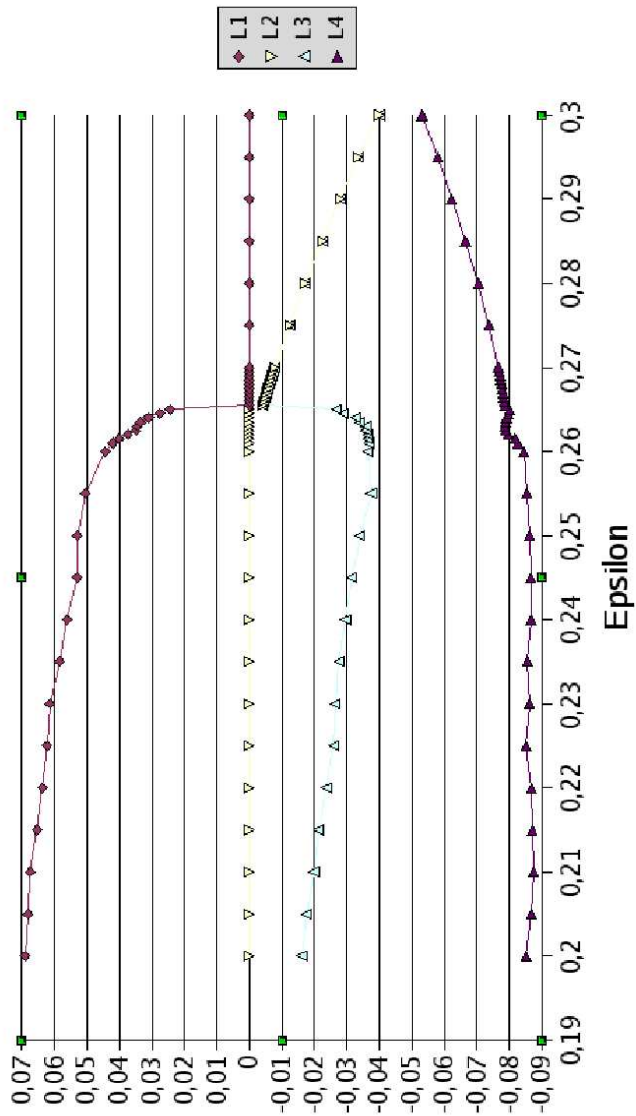


Abbildung 4: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_1$ ;  $dQ = 0.2$

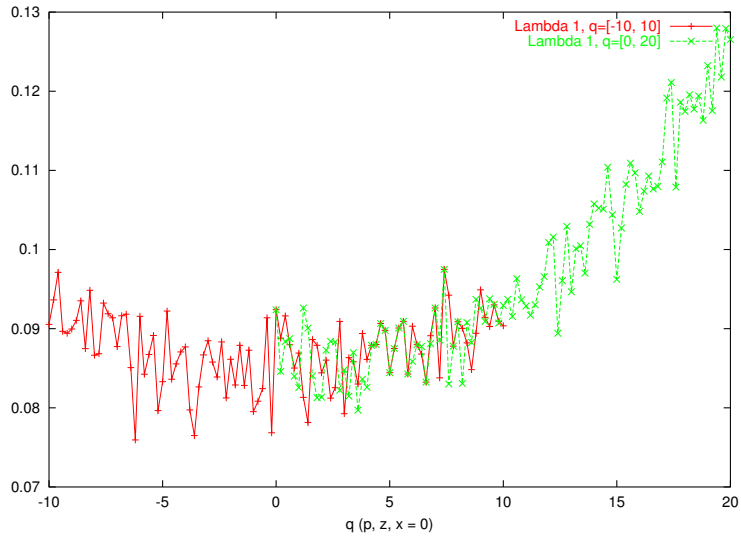
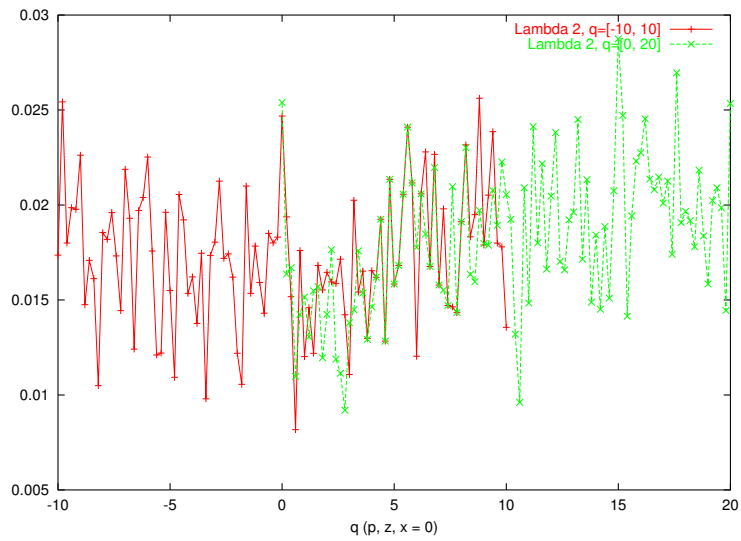


Abbildung 5: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_2$ ;  $dQ = 0.2$



$\varepsilon = 0.2$ ;  $dT = 0.001$ ; 5M Iterationen

Abbildung 6: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_3$ ;  $dQ = 0.2$

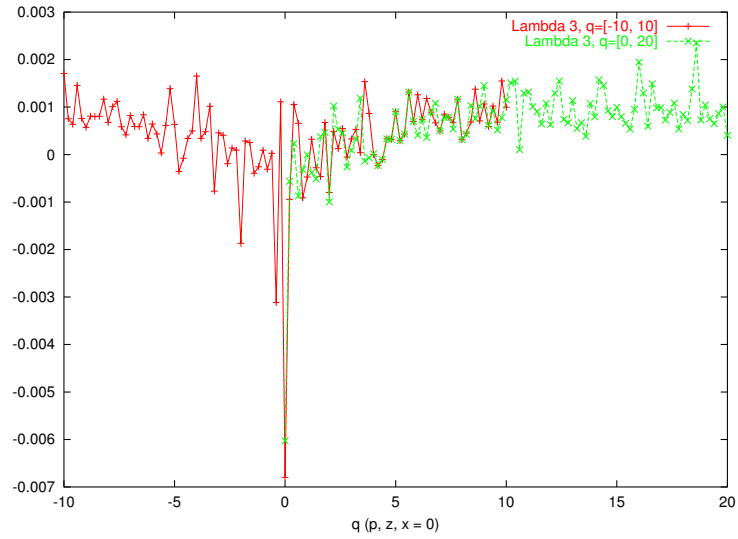
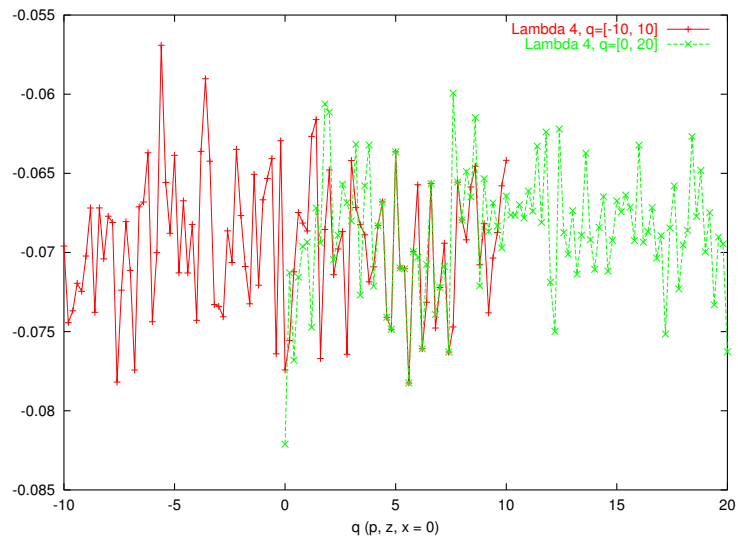


Abbildung 7: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_4$ ;  $dQ = 0.2$



$\varepsilon = 0.2$ ;  $dT = 0.001$ ; 5M Iterationen

Abbildung 8: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_1$ ;  $dQ = 0.01$

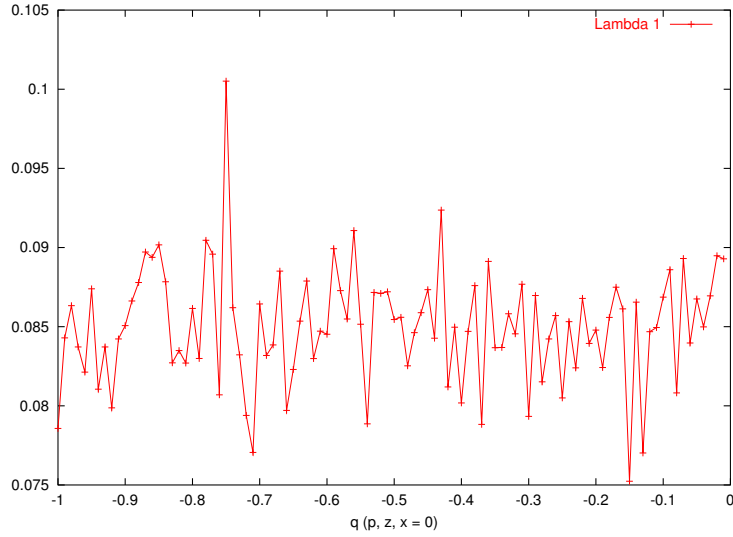
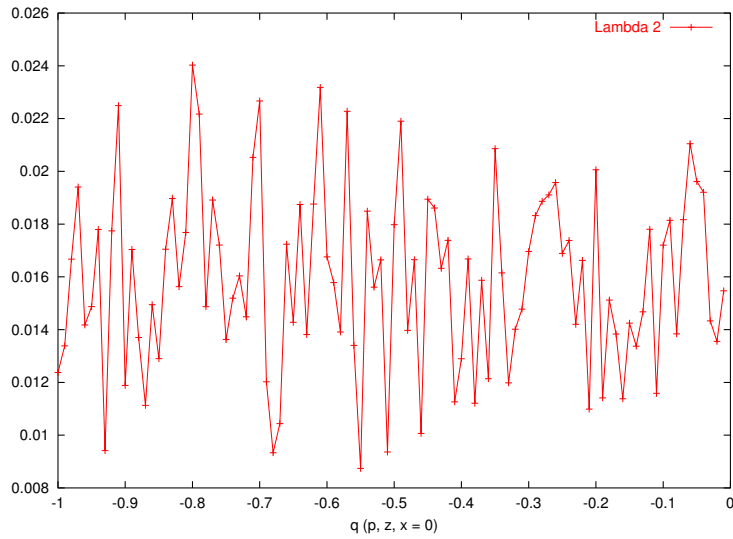


Abbildung 9: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_2$ ;  $dQ = 0.01$



$\varepsilon = 0.2$ ;  $dT = 0.001$ ; 5M Iterationen

Abbildung 10: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_3$ ;  $dQ = 0.01$

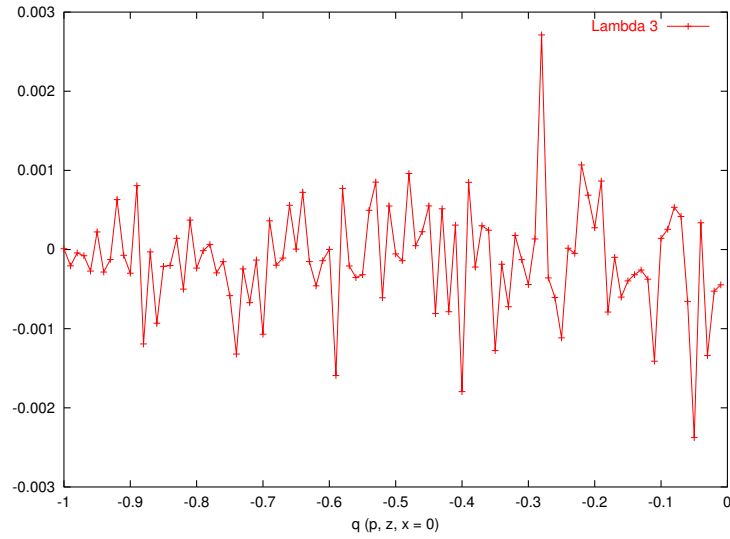
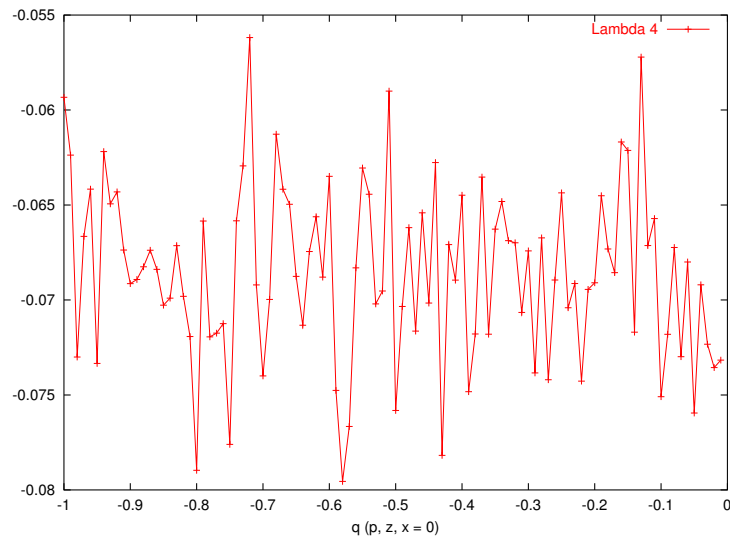


Abbildung 11: Lokaler Lyapunov-Exponent  $\lambda_4$ ;  $dQ = 0.01$



$\varepsilon = 0.2$ ;  $dT = 0.001$ ; 5M Iterationen

Abbildung 12: Zeitverlauf der q Bewegung;  $\epsilon = .25; dT = .005; 5k$  Iterationen

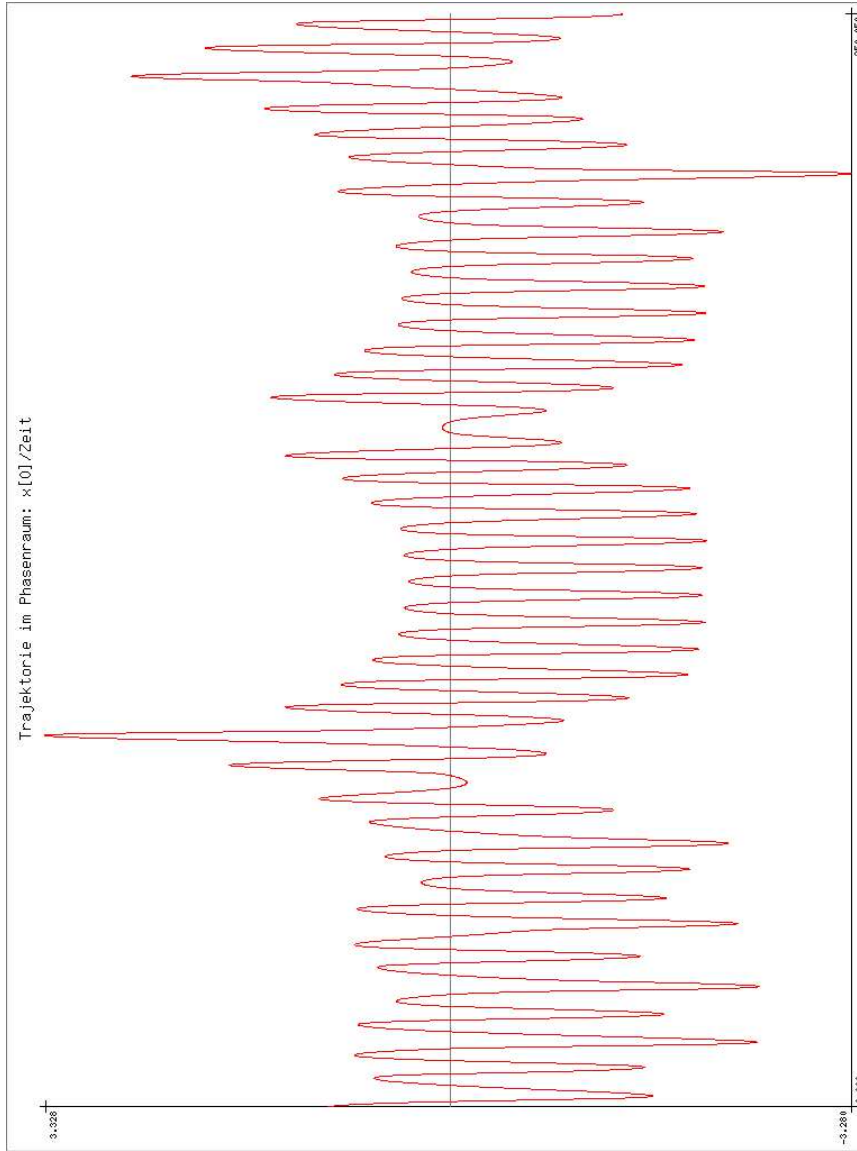


Abbildung 13: Projektion der Trajektorie auf die q-p Ebene;  $\varepsilon = .25; dT = .005;$   
5k Iterationen

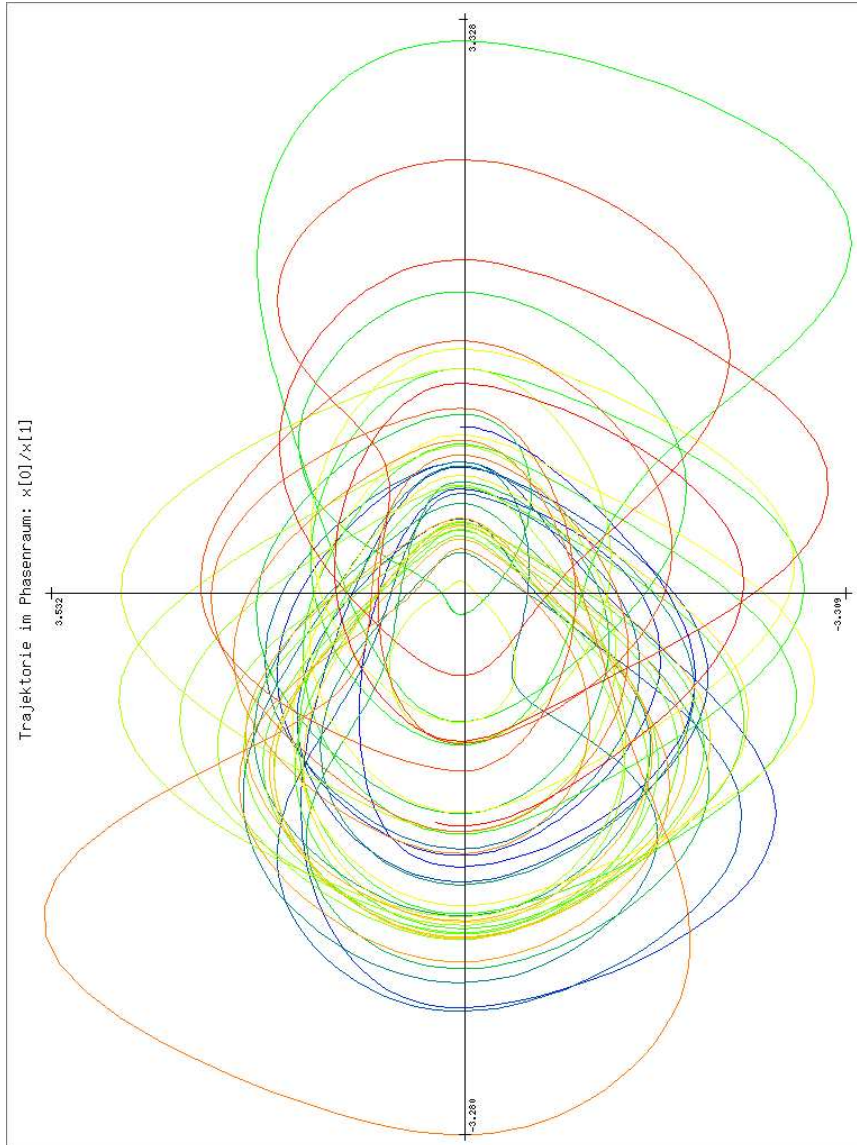


Abbildung 14: Projektion der Trajektorie auf die z-x Ebene;  $\varepsilon = .25; dT = .005;$   
5k Iterationen

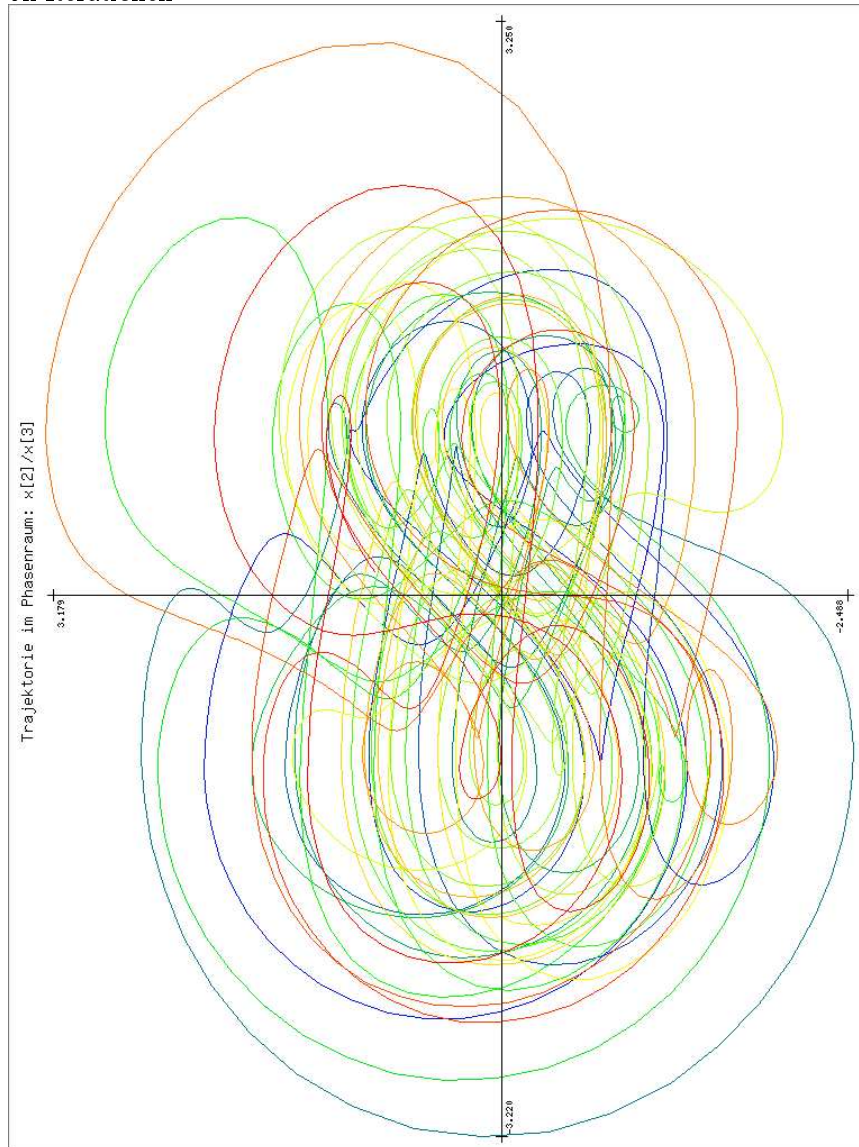


Abbildung 15: Zeitverlauf der q Bewegung;  $\varepsilon = 1.0$ ;  $dT = .005$ ; 10k Iterationen

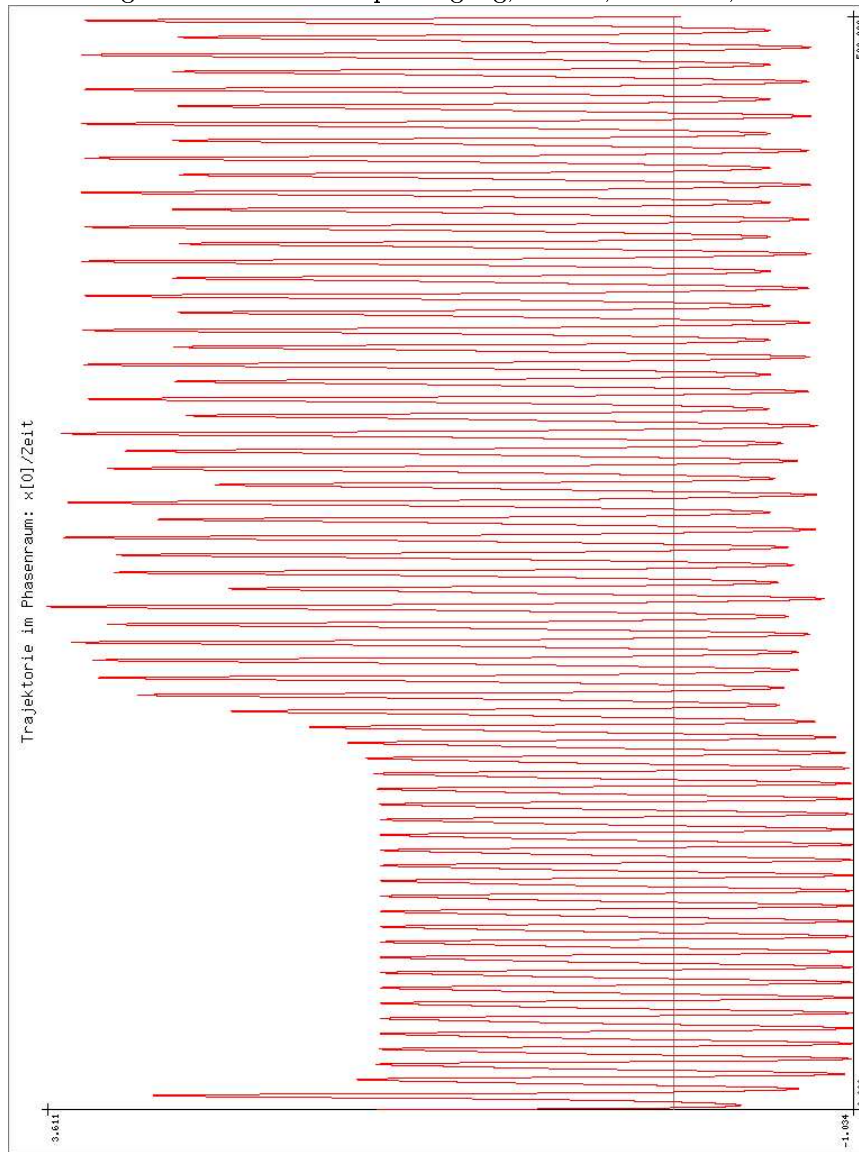


Abbildung 16: Projektion der Trajektorie auf die q-p Ebene;  $\varepsilon = 1.0$ ;  $dT = .005$ ; 10k Iterationen

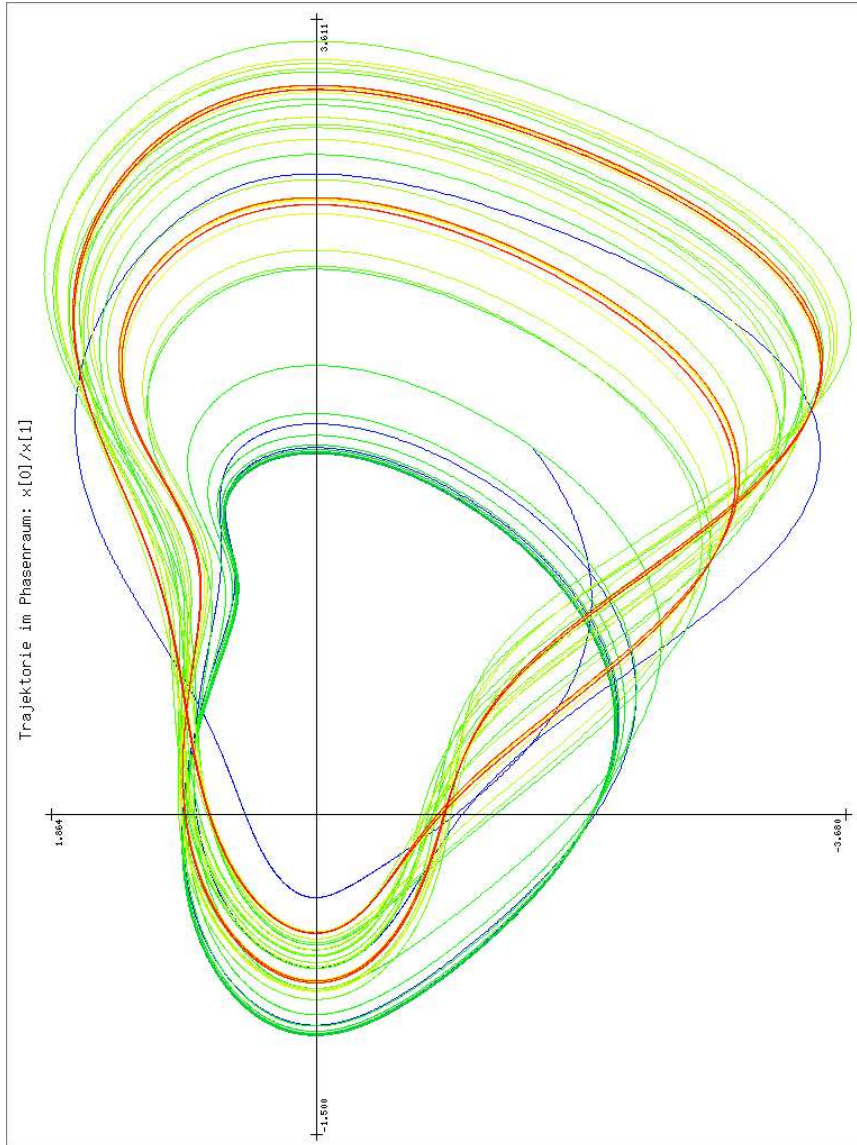


Abbildung 17: Projektion der Trajektorie auf die z-x Ebene;  $\varepsilon = 1.0; dT = .005$ ; 10k Iterationen

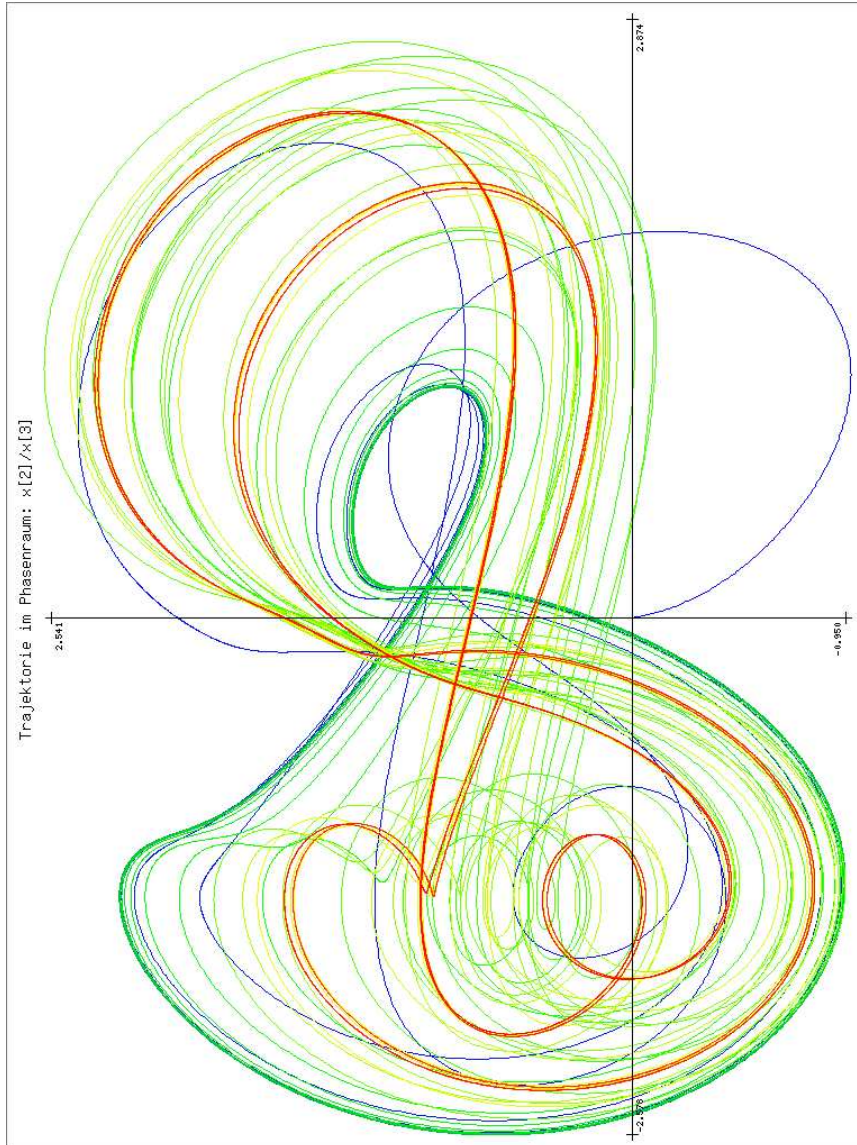


Abbildung 18: Projektion der Poincaré Abbildung auf die q-p Ebene ( Farbverlauf = z Achse);  $\varepsilon = .25; dT = .005$ ; 20m Iterationen

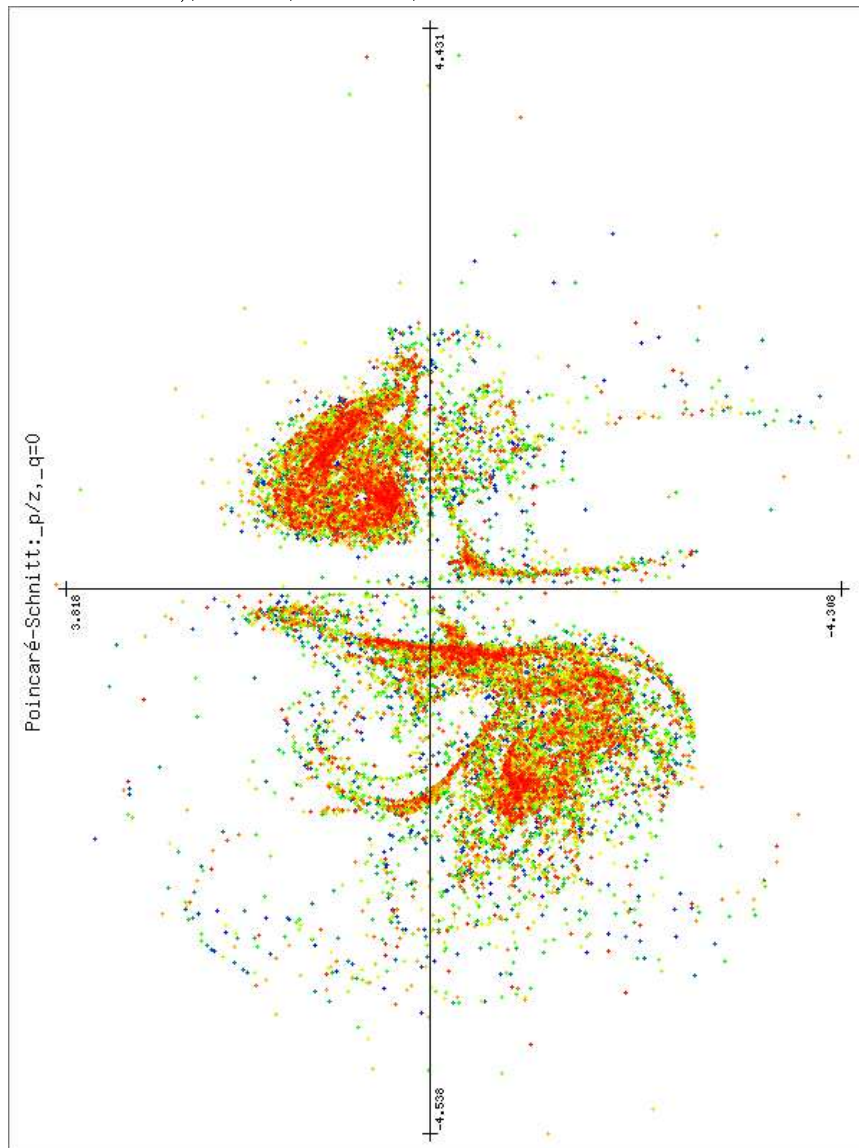


Abbildung 19: Projektion der Poincaré Abbildung auf die q-z Ebene ( Farbverlauf = x Achse);  $\varepsilon = .25; dT = .005; 20m$  Iterationen

